スタディサプリ　国公立大 数学ⅠAⅡBについて

この講座は，国公立大学における個別試験を受験する生徒を対象に，実際に出題された入試問題を題材に，これまでの学習で培ってきた力をもとに，どのように問題を解きほぐし，アウトプットすべきかを伝授する講座です。

この講座を受けていただく時点でのあなたの実力が，国公立大学があなたに期待している解法に対して，どこまで到達し，上回り，また下回っているかについて，予習と講義動画を通じて分野別に整理することで，あなたの今後の学習の指針となるでしょう。

山内　恵介

― 目次 ―

第１講　場合の数と確率 …… 2
第２講　微分・積分 …… 5
第３講　ベクトル …… 8
第４講　数列 …… 11

**※授業当日までに，該当する講の「予習」を，ノート等に必ず行ってから授業に臨んで下さい。
当日の授業は，予習を行っていることを前提に行われます。**

第１講　場合の数と確率

1　大中小３個のさいころを同時に投げて，出る目をそれぞれ a，b，c とする．この a，b，c に対し，$f(x)=ax^2+bx+c$ とおくとき，次の問いに答えよ．

(1)　方程式 $f(x)=0$ が，１つの実数解（重解）をもつ確率を求めよ．

(2)　方程式 $f(x)=0$ が，異なる２つの実数解をもつ確率を求めよ．

(3)　方程式 $f(x)=0$ が，実数解をもたない確率を求めよ．

(4)　方程式 $f(x)=0$ が，異なる２つの実数解 α，β をもち，かつ $\alpha^2+\beta^2$ が整数となる確率を求めよ．

2　0 から 9 までの整数が 1 つずつ書かれた 10 枚のカードがある．次の問いに答えよ．

(1)　書かれた整数の和が 3 の倍数になる 3 枚のカードの組合せの総数を求めよ．

(2)　10 枚から 4 枚を同時に選ぶとき，それら 4 枚に書かれた整数の和が偶数になる確率を求めよ．

(3)　はじめ 10 枚あるカードの中から，1 回に 1 枚ずつ選び，0 が書かれたカードを選ぶまで繰り返す．選んだすべてのカードに書かれた整数の和が 10 以上になる確率を求めよ．

ただし，1 回選んだカードは次回以降の選択肢から除くものとする．

3　m，n を整数とする．xy 平面上の 4 点 $(m,\ n)$，$(m-1,\ n)$，$(m-1,\ n-1)$，$(m,\ n-1)$ を頂点にもつ正方形を $R_{(m,\ n)}$ と表す．初めに１辺の長さが１のさいころが $R_{(1,\ 1)}$ に１の目を上に置かれている．１枚の硬貨を投げて表が出たらさいころを x 軸方向に $+1$ だけ転がして移し，裏が出たら y 軸方向に $+1$ だけ転がして移す．以下の問いに答えよ．

ただし，さいころの向かい合う面の数の目の和は７であるとする．

(1)　硬貨を５回投げたあとにさいころが $R_{(3,\ 4)}$ の位置にある確率を求めよ．

(2)　硬貨を２回投げたあとにさいころの６の目が上にあるという条件の下で，硬貨を５回投げたあとにさいころが $R_{(3,\ 4)}$ の位置にある条件付き確率を求めよ．

(3)　硬貨を５回投げたあとにさいころの１の目が上にある確率を求めよ．

テキスト解答

【講義問題の解答・解説】

第１講　場合の数と確率

1　2 次方程式 $f(x)=0$ の判別式を D とすると，$D=b^2-4ac$

(1)　$f(x)=0$ が重解をもつのは $D=0$，つまり $b^2-4ac=0$ のとき.

$b^2=4ac$ であり，右辺は偶数より，左辺も偶数．b^2 が偶数より，b は偶数に限られる.

$b=2$ のとき $ac=1$ より $(a,\ c)=(1,\ 1)$ の 1 通り

$b=4$ のとき $ac=4$ より $(a,\ c)=(1,\ 4)$，$(2,\ 2)$，$(4,\ 1)$ の 3 通り

$b=6$ のとき $ac=9$ より $(a,\ c)=(3,\ 3)$ の 1 通り

よって，求める確率は $\dfrac{1+3+1}{6^3}=\dfrac{5}{216}$

(2)　$f(x)=0$ が異なる 2 つの実数解をもつのは $D>0$，つまり $b^2-4ac>0$ のとき.

$b^2>4ac\geqq 4$ より，b は 3 以上である.

$b=3$ のとき $4ac<9$ より $ac<\dfrac{9}{4}$　よって $(a,\ c)=(1,\ 1)$，$(1,\ 2)$，$(2,\ 1)$ の 3 通り

$b=4$ のとき $4ac<16$　より $ac<4$

よって $(a,\ c)=(1,\ 1)$，$(1,\ 2)$，$(1,\ 3)$，$(2,\ 1)$，$(3,\ 1)$ の 5 通り

$b=5$ のとき $4ac<25$　より $ac<\dfrac{25}{4}$

よって $(a,\ c)=(1,\ 1)$，$(1,\ 2)$，$(1,\ 3)$，$(1,\ 4)$，$(1,\ 5)$，$(1,\ 6)$，$(2,\ 1)$，
$(2,\ 2)$，$(2,\ 3)$，$(3,\ 1)$，$(3,\ 2)$，$(4,\ 1)$，$(5,\ 1)$，$(6,\ 1)$ の14通り

$b=6$ のとき $4ac<36$　より $ac<9$

よって $(a,\ c)=(1,\ 1)$，$(1,\ 2)$，$(1,\ 3)$，$(1,\ 4)$，$(1,\ 5)$，$(1,\ 6)$，$(2,\ 1)$，$(2,\ 2)$，
$(2,\ 3)$，$(2,\ 4)$，$(3,\ 1)$，$(3,\ 2)$，$(4,\ 1)$，$(4,\ 2)$，$(5,\ 1)$，$(6,\ 1)$
の 16 通り

よって，求める確率は $\dfrac{3+5+14+16}{6^3}=\dfrac{38}{6^3}=\dfrac{19}{108}$

(3)　$f(x)=0$ が実数解をもたない事象は，(1)，(2)の余事象である.

よって，求める確率は $1-\left(\dfrac{5}{216}+\dfrac{19}{108}\right)=\dfrac{173}{216}$

(4)　解と係数の関係より $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$，$\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

よって，$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\left(-\dfrac{b}{a}\right)^2-2\cdot\dfrac{c}{a}=\dfrac{b^2}{a^2}-\dfrac{2c}{a}=\dfrac{b^2-2ac}{a^2}$

これが整数となる a，b，c のうち，(2)を満たすものを考える.

$a=1$ のとき $\alpha^2+\beta^2=b^2-2c$ より，(2)のうち $a=1$ である

$(b,\ c)=(3,\ 1)$，$(3,\ 2)$，$(4,\ 1)$，$(4,\ 2)$，$(4,\ 3)$，$(5,\ 1)$，$(5,\ 2)$，$(5,\ 3)$，$(5,\ 4)$，
$(5,\ 5)$，$(5,\ 6)$，$(6,\ 1)$，$(6,\ 2)$，$(6,\ 3)$，$(6,\ 4)$，$(6,\ 5)$，$(6,\ 6)$

の 17 通りすべてが条件を満たす.

$a=2$ のとき $\alpha^2+\beta^2=\dfrac{b^2-4c}{4}$ より，(2)のうち b が偶数である

$(b,\ c)=(4,\ 1),\ (6,\ 1),\ (6,\ 2),\ (6,\ 3),\ (6,\ 4)$

の 5 通りが条件を満たす.

$a=3$ のとき　(2)の $(b,\ c)=(4,\ 1),\ (5,\ 1),\ (5,\ 2),\ (6,\ 1),\ (6,\ 2)$ のうち

$\alpha^2+\beta^2=\dfrac{b^2-6c}{9}$ が整数となるものはない.

$a=4$ のとき　(2)の $(b,\ c)=(5,\ 1),\ (6,\ 1),\ (6,\ 2)$ のうち

$\alpha^2+\beta^2=\dfrac{b^2-8c}{16}$ が整数となるものはない.

$a=5$ のとき　(2)の $(b,\ c)=(5,\ 1),\ (6,\ 1)$ のうち

$\alpha^2+\beta^2=\dfrac{b^2-10c}{25}$ が整数となるものはない.

$a=6$ のとき　(2)の $(b,\ c)=(5,\ 1),\ (6,\ 1)$ のうち

$\alpha^2+\beta^2=\dfrac{b^2-12c}{36}$ が整数となるものはない.

よって，求める確率は $\dfrac{17+5}{6^3}=\dfrac{11}{108}$

2 (1)　9 枚のカードのうち，書かれた整数を 3 で割ったときの余りが

0 となるのは 0, 3, 6, 9 が書かれた 4 枚

1 となるのは 1, 4, 7 が書かれた 3 枚

2 となるのは 2, 5, 8 が書かれた 3 枚

である．また，書かれた整数の和が 3 の倍数になるのは，それぞれの整数を 3 で割ったときの余りの和が 3 の倍数のときであり，その余りの組は

$(0,\ 0,\ 0),\ (0,\ 1,\ 2),\ (1,\ 1,\ 1),\ (2,\ 2,\ 2)$

に限られる．このそれぞれについて，カードの組合せの総数は

$(0,\ 0,\ 0)$ のとき ${}_4C_3=4$　　$(0,\ 1,\ 2)$ のとき ${}_4C_1\times{}_3C_1\times{}_3C_1=36$

$(1,\ 1,\ 1)$ のとき ${}_3C_3=1$　　$(2,\ 2,\ 2)$ のとき ${}_3C_3=1$

以上より，求める組合せの総数は $4+36+1+1=42$

(2)　10 枚のカードのうち，書かれた整数が偶数，奇数のものは，ともに 5 枚.

選んだカードに書かれた整数の和が偶数となるのは以下のとき.

・偶数 4 枚のとき　　組合せの総数は ${}_5C_4=5$

・偶数 2 枚，奇数 2 枚のとき　　組合せの総数は ${}_5C_2\times{}_5C_2=100$

・奇数 4 枚のとき　　組合せの総数は ${}_5C_4=5$

以上より，求める確率は $\dfrac{5+100+5}{{}_{10}C_4}=\dfrac{110}{210}=\dfrac{11}{21}$

(3)　選んだカードに書かれた整数の和が 9 以下となるのは以下のとき.

・1 回目に 0 が出るとき　　その確率は $\dfrac{1}{10}$

・2回目に0が出るとき

1回目に1〜9のカードが出るときで，その確率は $\dfrac{9}{10}\times\dfrac{1}{9}=\dfrac{1}{10}$

・3回目に0が出るとき

1回目と2回目の整数の和が9以下となるときで，2数の組合せは

(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (1, 7), (1, 8), (2, 3),
(2, 4), (2, 5), (2, 6), (2, 7), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 5) の16通り.

よって，その確率は $\dfrac{16\times 2!}{{}_{10}\mathrm{P}_2}\times\dfrac{1}{8}=\dfrac{2}{45}$

・4回目に0が出るとき

1回目から3回目の整数の和が9以下になるときで，3数の組合せは

(1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 2, 5), (1, 2, 6), (1, 3, 4), (1, 3, 5), (2, 3, 4)
の7通り.

よって，その確率は $\dfrac{7\times 3!}{{}_{10}\mathrm{P}_3}\times\dfrac{1}{7}=\dfrac{1}{120}$

$1+2+3+4=10>9$ より，5回目以降に0が出る場合で整数の和が9以下になることはない.

以上より，求める確率は

$$1-\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{2}{45}+\frac{1}{120}\right)=\frac{269}{360}$$

3　1枚の硬貨を投げて表，裏が出る確率はともに $\dfrac{1}{2}$ である.

(1)　5回投げたあとにさいころが $R_{(3,\ 4)}$ の位置にあるのは，表が2回，裏が3回出るとき.

よって，求める確率は ${}_5\mathrm{C}_2\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{5}{16}$

(2)　2回投げたあとに6の目が上にあるのは，$R_{(3,\ 1)}$ または $R_{(1,\ 3)}$ にいるときで，その確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2\times 2$$

$R_{(3,\ 1)}$ から $R_{(3,\ 4)}$ に移動するのは，裏が3回出るときで，その確率は $\left(\dfrac{1}{2}\right)^3$

$R_{(1,\ 3)}$ から $R_{(3,\ 4)}$ に移動するのは，表が2回，裏が1回出るときで，その確率は

$${}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}$$

よって，求める条件付き確率は

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^2\times{}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2\times 2}=\frac{1}{4}$$

(3)　硬貨を5回投げたあとにさいころの1の目が上にあるためには，硬貨を2回または3回投げたあとにさいころの6の目が上になければならない．

硬貨を5回投げるという試行を，2回投げたあとに3回投げるという試行と，3回投げたあとに2回投げるという試行に分けて考える．

硬貨を2回投げて表，表または裏，裏と出る事象を事象 A，硬貨を3回投げて表，裏，表，または裏，表，裏と出る事象を事象 B とすると，1が上の状態で事象 A または事象 B が起こると6が上になり，6が上の状態で事象 A または事象 B が起こると1が上になる．

硬貨を5回投げたあとにさいころの1の目が上にあるのは，事象 A が起こったあとに事象 B が起こる，または事象 B が起こったあとに事象 A が起こる場合である．

事象 A，事象 B が起こる確率はそれぞれ $\left(\frac{1}{2}\right)^2\times 2=\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\times 2=\frac{1}{4}$ より，求める確率は $\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$